

AREA: Matemáticas

GRADO: Undécimo

ESTUDIANTE: _____

DOCENTE: _____

CÁLCULO

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

OBJETIVO: Clasificar funciones de variable real de acuerdo con sus comportamientos.

- ❖ Identificar el comportamiento de las funciones inyectivas.
- ❖ Identificar el comportamiento de las funciones sobreyectivas.
- ❖ Identificar el comportamiento de las funciones biyectivas.



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES

Las funciones se pueden clasificar según como se relacionen los elementos del dominio con los elementos del rango.

RECUERDEN:

- No todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de los elementos del dominio
- Dos o más elementos del dominio pueden tener la misma imagen.

FUNCIÓN INYECTIVA:

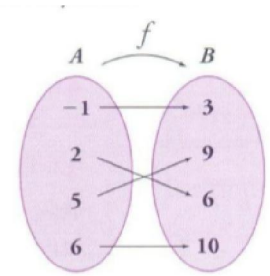
Cada elemento del rango sólo es utilizado una vez como imagen por ser la regla de asociación biunívoca. Este concepto puede definirse desde varias perspectivas:

La cardinalidad del dominio es igual a la del rango.

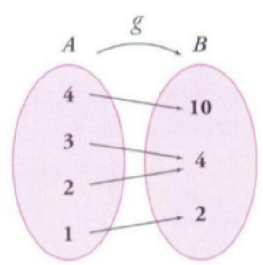
Cada elemento del rango es imagen de un solo elemento del dominio.

No hay, en el dominio, dos o más elementos diferentes con la misma imagen.

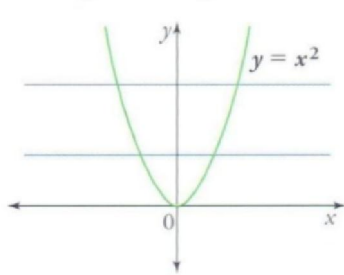
$f(x) = 4x - 1$



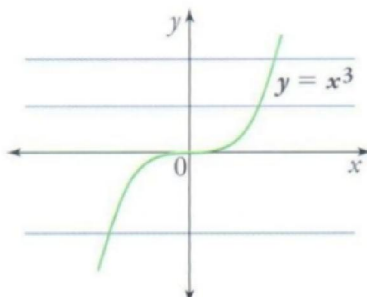
SI ES FUNCIÓN INYECTIVA



NO ES FUNCIÓN INYECTIVA, porque los valores 3 y 2 en el conjunto A tienen una misma imagen que es 4. Luego, $3 \neq 2$, pero $g(3) = g(2)$.



NO ES FUNCIÓN INYECTIVA, porque al trazar una línea recta toca la función en más de un punto.



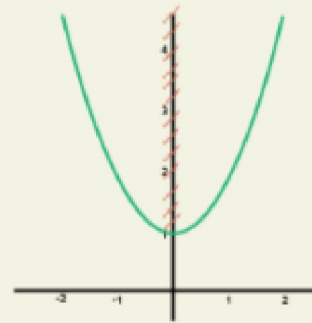
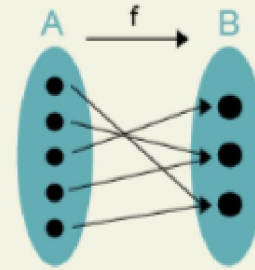
ES FUNCIÓN INYECTIVA, porque al trazar una línea horizontal no cortará la función en más de un punto.

FUNCIÓN SOBREYECTIVA:

En cuanto a la comparación entre el rango y el codominio de una función, el caso particular que se toma para establecer una categoría en el concepto de función es aquel en que estos sean iguales.

- Una función es sobreyectiva si su rango es igual a su codominio.
- Una función es sobreyectiva si todos los elementos del codominio son imágenes de la función.
- Función sobreyectiva: si para todo elemento en el codominio, existe un elemento en el dominio del cual este es imagen.

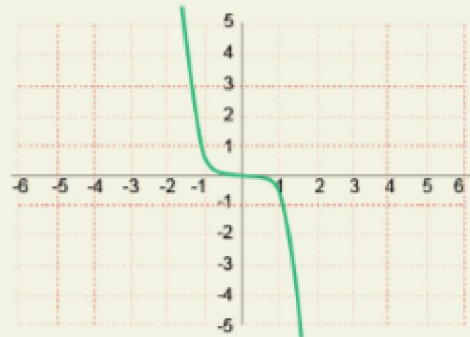
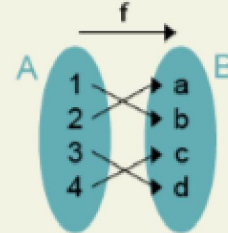
$$f(x) = 2x^2 - 1$$



FUNCIÓN BIYECTIVA:

Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

- Desde el punto de vista matemático es fundamental, en particular al abordar temáticas correspondientes a espacios, Subespacios, bases, homomorfismos e isomorfismos.
- El concepto de función biyectiva pone en juego de manera simultánea los conceptos de función, función inyectiva y función sobreyectiva.



$$f(x) = 6x + 9$$

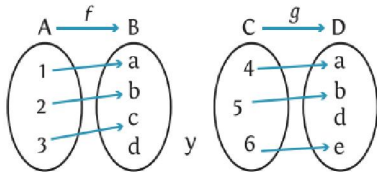
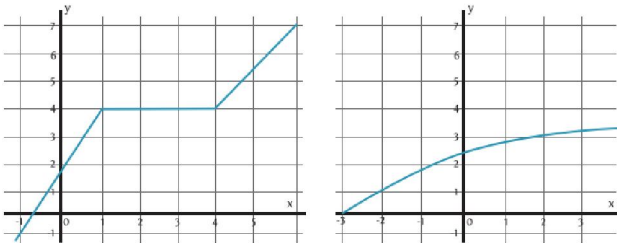
$$f^{-1}(x) = (y - 9) / 6$$



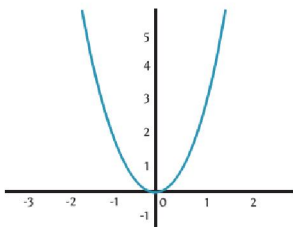
ACTIVIDADES

- Realizar en el cuaderno un organizador gráfico (mapa conceptual, línea de tiempo, cuadro sinóptico, entre otros) donde resuma coherentemente los conceptos planteados en la guía (propiedades de las funciones).
- De acuerdo con la definición de Función Inyectiva, que ya conoces, determina si las funciones dadas son o no inyectivas.

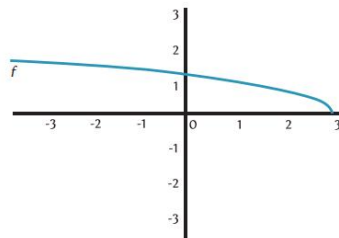
Gráficos



- ¿Es la función representada en la gráfica sobreyectiva?



- Considera la función: $f: (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$; cuya grafica es la siguiente



Determina si es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva y explica.

PRODUCCIÓN TEXTUAL

- Escoge 15 palabras que consideres relevantes en relación con las propiedades de función y elabora un crucigrama (se debe dar una clave o pista, sin hacer explícita la palabra), pueden apoyarse con enlaces de internet donde pueden ingresar las palabras y les arroja el crucigrama, comparto el siguiente enlace:
<https://www.educima.com/crosswordgenerator.php>

➡ En una fábrica el costo de x camisas está dado por la siguiente expresión $C(x) = 3x^2 + 5$.



- ¿Cuánto valen 1000 camisas?
- ¿Cuál sería el dominio de la función costo para esta situación?
- En este contexto, ¿la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.
- ¿Todas las funciones Biyectivas se pueden representar en diagramas sagitales?
- ¿Todas las funciones Biyectivas se pueden representar en el plano cartesiano?

GEOMETRÍA

LAS CÓNICAS

OBJETIVO: Identificar las secciones cónicas en objetos de su entorno.

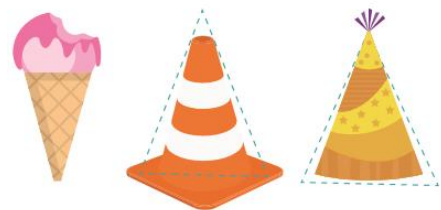
- ❖ Determinar las características de las secciones cónicas.
- ❖ Reconocer las cónicas degeneradas a partir de actividades.
- ❖ Identificar en su entorno formas elípticas reconociendo que dicha forma se obtiene a partir del corte de un cono.

SECCIONES CÓNICAS

Cónicas: historia

Las curvas cónicas fueron estudiadas por matemáticos de la escuela Griega hace mucho tiempo.

¿Quién fue el primero en estudiar las cónicas? Una de las primeras personas en estudiar las secciones cónicas fue Menaechmus (Menecmo) de Grecia, alumno de Eudoxio, como consecuencia de su interés en el problema de construir con regla y compás un cubo de volumen doble al de un cierto cubo dado; esto sucedió en el siglo IV a. C. Probablemente, Menecmo encontró algunas propiedades de las secciones cónicas, como las asíntotas de la hipérbola, aunque no existe ningún documento que lo demuestre. En el mismo siglo el geómetra Euclides escribió 4 libros sobre las secciones cónicas, de los cuales ninguno se conserva en la actualidad. Según Pappus de Alejandría, Aristeo (contemporáneo de Euclides) trabajó las cónicas y las llamó: sección del cono rectángulo, sección del cono acutángulo y sección del cono obtusángulo (parábola, elipse e hipérbola actual). Pero, al igual que ocurre con los cuatro libros de Euclides, no se conservan documentos de esos trabajos.



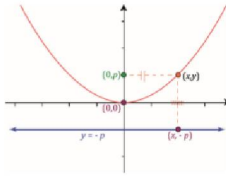
El primer tratado escrito que se conserva sobre las secciones cónicas es debido a Apolonio de Perga. En sus 8 libros Apolonio estudia las propiedades geométricas de las secciones cónicas. Las figuras que se van a estudiar, todas ellas conocidas con el nombre genérico de cónicas, se pueden obtener como intersección de una superficie cónica con un plano. Previamente a este trabajo, existían estudios elementales sobre determinadas intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de un cono, obteniéndose elipses, parábolas o hipérbolas según que el ángulo superior del cono fuese agudo, recto u obtuso, respectivamente. Si bien no disponía de la Geometría Analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las cónicas que se aproxima mucho a la misma.

Los resultados obtenidos por Apolonio sobrevivieron sin cambios hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la Geometría Analítica (Fermat y Descartes se pueden considerar los fundadores de la Geometría Analítica), retomaron el problema llegando a su casi total estudio, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone. La contribución de cada uno reside esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana con respecto a un sistema de coordenadas. El estudio analítico de Descartes ofrece un aspecto puramente algebraico y se sirve de las ecuaciones de las cónicas para deducir propiedades referentes a las curvas y a su construcción geométrica. Por otro lado, Fermat deduce las ecuaciones de la recta, la circunferencia y todas las secciones cónicas.

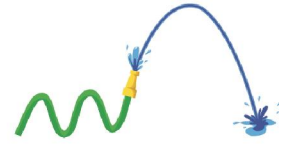
Los resultados obtenidos por Apolonio sobrevivieron sin cambios hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la Geometría Analítica (Fermat y Descartes se pueden considerar los fundadores de la Geometría Analítica), retomaron el problema llegando a su casi total estudio, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone. La contribución de cada uno reside esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana con respecto a un sistema de coordenadas. El estudio analítico de Descartes ofrece un aspecto puramente algebraico y se sirve de las ecuaciones de las cónicas para deducir propiedades referentes a las curvas y a su construcción geométrica. Por otro lado, Fermat deduce las ecuaciones de la recta, la circunferencia y todas las secciones cónicas.

LA PARÁBOLA

La parábola presenta una propiedad, la cual es que: la distancia de cualquier punto que se encuentre en su curva hasta el foco será igual a la distancia del mismo punto a la directriz



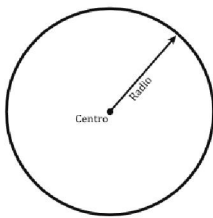
La Parábola la puedes encontrar en la trayectoria de un proyectil como un cohete, una pelota de baloncesto o el agua que brota de una fuente (movimiento descubierto por Galileo, aunque fue descubierta desde mucho tiempo antes), en reflectores para lámparas y telescopios, en detectores de radar, en antenas receptoras de señales de radio y televisión como las antenas satelitales.



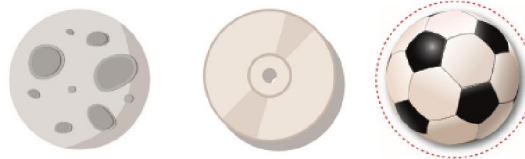
LA CIRCUNFERENCIA

Los puntos que forman la circunferencia conserva la misma distancia hasta el punto central.

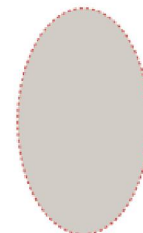
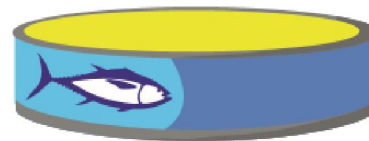
Dicha distancia es lo que se conoce como radio.



La circunferencia la puedes encontrar en utensilios de cocina como tapas, bordes de ollas; también en tapas de alcantarillas, objetos celestes como la luna, balones de futbol, etc.



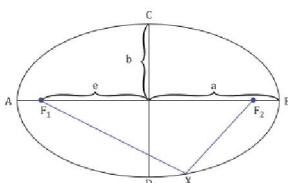
LA ELIPSE La elipse la puedes encontrar en formas de las cubiertas de mesas, formas de ventanas, formas de marcos para encuadrar retratos y fotografías, formas de las bases de envases, en la forma de las orbitas de los planetas que giran alrededor del sol (descubierto por Kepler)



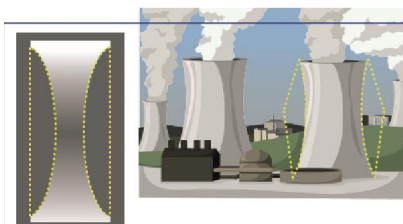
LA HIPÉRBOLA

Los puntos que conforman el lugar geométrico de la hipérbola cumplen la propiedad:

La distancia de cualquier punto de la hipérbola al foco F_1 , menos la distancia al foco F_2 en valor absoluto, es igual a un valor constante $2a$.



La hipérbola la puedes encontrar diversas formas en las construcciones y en los elementos construidos por el ser humano. Es el caso de los lentes bicóncavos utilizados en la industria oftalmológica. Y en los silos nucleares.



ACTIVIDADES






Recorta y pega los conceptos dados en el cuaderno de geometría.

Dada la lectura “historia de las cónicas”

1. ¿Quiénes son los responsables del descubrimiento de las secciones cónicas?
2. ¿Quiénes profundizaron en el estudio de las secciones cónicas y cuáles fueron los aportes de estos personajes para la humanidad?
3. ¿Cuál o cuáles fueron los problemas que dieron origen al estudio de las secciones cónicas?
4. Mencione las obras en las que se condensa el estudio de las secciones cónicas.

PRÁCTICA

Sigue atentamente las instrucciones y realiza lo que en cada una de ellas se describe. Utiliza las imágenes como referentes.

- Con plastilina u otro material construye cuatro conos. 
- Con ayuda de un bisturí corta de manera horizontal uno de ellos. 
- Elige otro de los conos que elaboraste y córtalo con apoyo del bisturí en diagonal paralela a un lado. 
- Con ayuda de un bisturí corta de manera vertical otro de los conos construidos. 
- Con el último de los conos construidos, recórtalo de forma que sea perpendicular a uno de sus lados. 

5. Realizar un video de 3 minutos máximo donde:
6. Describe tu procedimiento e indica qué valor de ángulo elegiste para realizar el corte e indica qué cónica degenerada se obtiene.
7. Describe lo que aprendiste con este proceso e indica sus características.

NOTA: Si no tienes herramienta tecnológica para hacer el video debes escribir en el cuaderno el procedimiento a través de dibujos, donde describa el paso a paso.



8. Usa una cámara fotográfica y toma 16 fotos a los objetos que tengan forma de secciones cónicas que puedas apreciar en tu entorno, especialmente en casa. Con las fotografías que tomaste haga una selección de 8 de las fotos tomadas imprimirlas, y elaboren en octavo de cartulina un juego llamado concéntrese o memoria donde deberá hacer la relación entre las imágenes y la sección cónica que representa. Pueden apoyarse con enlaces de internet donde pueden ingresar las imágenes y les arroja el juego **memoria**, comparto el siguiente enlace:



<https://api.gynzy.com/en/es/items/lenguaje/memoria-palabras/32/2169>

9. Dado que has visto que es muy común encontrar elementos de forma cónica, como herramientas, como utensilios de cocina, muebles, instrumentos musicales, artes, en la naturaleza, etc... ¿Cuál consideras que es la importancia de las secciones cónicas en la vida diaria?

ESTADÍSTICA

PROBABILIDAD CONDICIONAL

OBJETIVO: Resolver situaciones aleatorias que involucren probabilidades condicionadas.

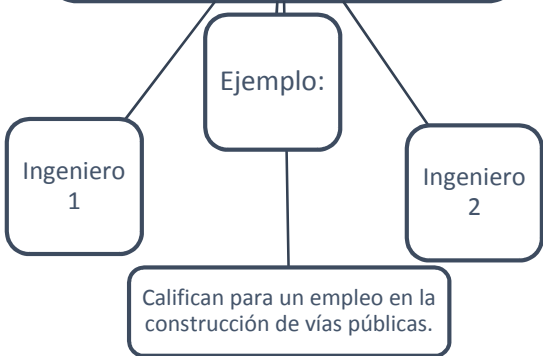
- ❖ Comprender el concepto de variable aleatoria
- ❖ Deducir la regla de Bayes mediante el uso de diagramas y tablas de frecuencias y probabilidades.

¡ ME LO GANÉ, ME LO GANÉ !



PROBABILIDAD CONDICIONAL

Con frecuencia, la probabilidad de ocurrencia de un evento se ve afectada por la ocurrencia de otro evento que se relaciona con el inicial.



La probabilidad de que el ingeniero 1 sea seleccionado puede estar afectada por el hecho de que dicho ingeniero haya optado un título de maestría en obras públicas, es decir, si el ingeniero 2 tiene un título de maestría en alguna otra especialidad, es posible que su probabilidad de ser escogido sea mucho menor que la probabilidad que tiene el ingeniero 1.

Recuerda que...
Dos eventos son independientes si
 $P(A / B) = P(A)$ o
 $P(B / A) = P(B)$

Para calcular la probabilidad condicional de un evento A dado que sucedió un evento B hay que conocer la **probabilidad de la intersección de dichos eventos.**

La probabilidad de ocurrencia del evento A dado que ha sucedido el evento B se simboliza como $P(A / B)$. La probabilidad condicional está determinada por la expresión:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

TEOREMA DE BAYES

Cuando se habla de **probabilidad condicional** se menciona un aspecto importante y es el hecho de calcular la **probabilidad de un evento antes de que otro evento influya en el mismo**.

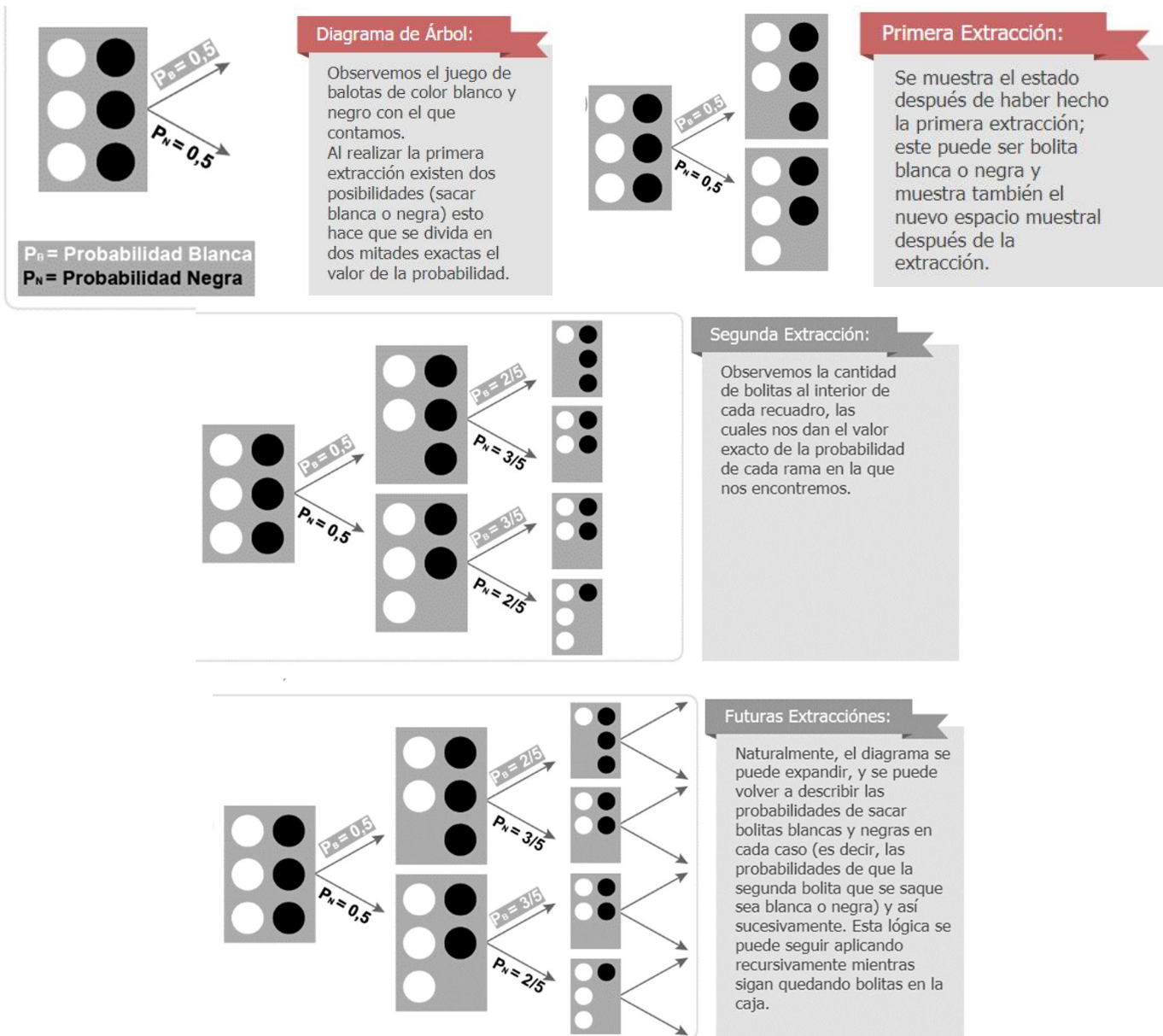
Si A_1 y A_2 son eventos mutuamente excluyentes, y $A_1 \cup A_2 = S_1$ entonces por el teorema de Bayes se tiene que:

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B / A_1)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2)}$$

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)P(B / A_2)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2)}$$

En el lenguaje del azar, hablar de la probabilidad del evento inicial se conoce como **probabilidad a priori**. Cuando se obtiene información adicional sobre el evento inicial, esta modifica los valores de la probabilidad a priori y genera una nueva probabilidad que se denomina probabilidad a posteriori; el teorema de Bayes proporciona un método para calcular **las probabilidades a posteriori**.

Este teorema se aplica cuando los eventos para los que se van a calcular las probabilidades son mutuamente excluyentes (sus intersecciones son vacías) y la unión de todos ellos es todo el espacio muestral.





EJEMPLO 1:

El 85% de los perros blancos son hembras. El 60% de los perros son blancos. Al tomar un perro al azar, ¿Cuál es la probabilidad que este sea blanco y hembra?

SOLUCIÓN:

*Definamos el experimento y los eventos A y B de la situación.

Experimento: **sacar un perro al azar**
 Llamemos A al evento: **“el perro es blanco”**
 Llamemos B al evento: **“el perro es hembra”**

*Observemos que información nos da el problema.

El 85% de los perros blancos son hembras, esta frase corresponde a $P(B/A)$ porque es la probabilidad de que el perro seleccionado sea hembra dado que es blanco.

El 60% de los perros son blancos, esta frase corresponde a $P(A)$ porque es la probabilidad de que el perro seleccionado sea blanco.

¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca y hembra?

Esta frase corresponde a $(P \cap B)$ pues es la probabilidad de que sea blanca y hembra, siempre la letra **“y” se relaciona con la intersección en teoría de conjuntos.**

Resumiendo,

tenemos: $P(B/A) = 0.85$
 $P(A) = 0.6$ ¿ $P(A \cap B) = ?$

De acuerdo con la ecuación de probabilidad condicional

$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ Entonces se despeja

quedando $P(B/A) \cdot P(A) = P(A \cap B)$

$0.85 \times 0.6 = P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0,51$

Es decir que la probabilidad de seleccionar un perro al azar y que este sea blanca y hembra es del 51%.

EJEMPLO 2:

En la etapa de selección para ascensos, la selección de recursos humanos analizó las hojas de vida de 1200 empleados. Después de estudiar dichas hojas de vida, decidió ascender a 324 empleados. Los datos de la selección se registran a continuación:

	Mujeres	Hombres
No ascendidos	204	672
Ascendidos	36	288

Después de revisar el registro de ascensos, el comité de talento humano determinó que en la elección se había dado discriminación, hecho que se reflejaba en el número de ascensos de mujeres. **¿Hubo discriminación en la elección de ascensos?**

Para solucionar la pregunta propuesta es necesario saber cuál es el significado de discriminación en este caso. Para ello, se analiza qué relación existe con el planteamiento y la probabilidad condicional.

SOLUCIÓN:

*Se identifican los eventos de la siguiente manera:
A: Ser mujer **B:** Ser hombre **C:** Ser ascendido
D: No ser ascendido.

*Se debe analizar si la probabilidad de ser ascendido dado que se es mujer es igual a la probabilidad de ser ascendido dado que se es hombre. Hacer este análisis obviaría el hecho de que entre los 1200 empleados hay cuatro veces más hombres que mujeres.

En términos de probabilidad se debe hallar $P(C/A)$ y $P(C/B)$.

Así: $P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$ del registro se tiene

$C \cap A = 36$, por tanto, $P(C \cap A) = \frac{36}{1200}$

Además $A = 240$, luego $P(A) = \frac{240}{1200}$

Entonces, $P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{36}{1200}}{\frac{240}{1200}} = \frac{36}{240} = 0,15$

$P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)}$ del registro se tiene $C \cap B = 288$, por tanto, $P(C \cap B) = \frac{288}{1200}$

Además $B = 960$, luego $P(B) = \frac{960}{1200}$

Entonces, $P(C/B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{288}{1200}}{\frac{960}{1200}} = \frac{288}{960} = 0,30$

Finalmente, se observa en los resultados que la probabilidad de un ascenso dado que se es mujer es la mitad de la probabilidad de un ascenso dado que se es hombre, con lo cual queda demostrado que **sí hubo discriminación en la elección.**

ACTIVIDADES

Pega en el cuaderno los conceptos y ejemplos descritos anteriormente.

- Analiza cada uno de los contextos que se muestran a continuación, y con base a ello responde las preguntas 1,2,3.



La lotería

Juego de azar tradicional en el país que consiste en acertar un número de cuatro cifras y una serie de dos cifras. El valor de la apuesta es fijo para todos los apostadores y se cuenta con una serie de premios diferentes, pues no solo se premia a quien acierte la totalidad de cifras, sino que también se cuenta con premios para quienes acierten parte de las cifras y para quienes acierten en otros sorteos conocidos como premios Secos. Los valores de los premios otorgados son establecidos según el criterio de cada lotería y habitualmente son cantidades de alto valor monetario.



El baloto

Juego de azar que tiene como característica principal contar con un premio económico de gran magnitud el cual se acumula al no ser ganado. Este juego consiste en acertar seis números entre el 1 y el 45, sin importar el orden en que salgan las balotas en el sorteo. Dentro de las reglas de juego, se gana a partir



La baraja de cartas

Esta consta de 52 cartas distribuidas en cuatro grupos: Trébol, Diamantes, Picas y Corazones; se tienen cartas desde el número 1 (Conocida como el As) hasta el número 10, además de tener cartas identificadas con las letras K, Q y J.

Habitualmente se juega con ellas en sitios conocidos como casinos y los premios varían a partir de la cantidad de dinero que se apueste y el plan de premios que se tenga en el sitio. Entre los juegos que se realizan con estas, se encuentra el conocido con el nombre de 21, que consiste en que los números de las cartas sumen este valor.

Entre los juegos que se realizan con estas, se encuentra el conocido con el nombre de Black Jack, que consiste en pedir cartas hasta que el total de estas sume 21, o se acerque lo más posible, sin pasarse de 21. Teniendo la particularidad de no usar una sola baraja de cartas.

- ¿Por qué se llaman juegos de azar?
- ¿Cuál es la relación que existe entre los juegos de azar y la aleatoriedad?
- ¿Qué tan importante puede ser la probabilidad?
- Se tienen en una caja 3 bolitas negras y 3 bolitas blancas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 2 bolitas y que resulten ser blancas?

TEOREMA DE BAYES

- Suponga que en un Instituto el 20% de los empleados son ingenieros, el 30% son normalistas y el resto son licenciados. El 15% de los ingenieros ocupan un puesto directivo, el 5% de los normalistas ocupan un puesto directivo y de los licenciados el 40% ocupan un puesto directivo.

- Realice un diagrama de árbol, que represente la información dada.
- Determine cada una de las siguientes probabilidades:

- Un ingeniero sea directivo
- Un licenciado sea directivo
- Un normalista sea directivo

PRODUCCIÓN TEXTUAL

- Consulta los datos o gráficos estadísticos en internet sobre el contagio del COVID-19 e interpreta la información que suministra. Posteriormente realiza una historieta o cómic con dibujos, manual o herramientas tecnológicas referente a la **posibilidad que existe en que esta región de Puerto Wilches se pueda contraer el virus.**

Casos confirmados acumulados en Colombia

