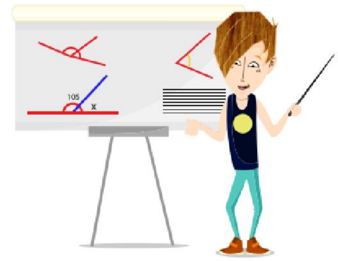
ÁREA: MATEMÁTICAS **GRADO: 10°**

ESTUDIANTE: ______________________________ **DOCENTE:** ______________________

TRIGONOMETRÍA

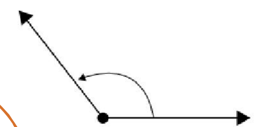


FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

OBJETIVO: Identificar ángulos y hacer mediciones.

- Identificar ángulos ubicados en el plano cartesiano
- Reconocer la medida de ángulos en sistema sexagesimal.

ÁNGULOS



GEOMETRÍA: Objeto estático que se caracteriza por ser dos rayos que tienen el origen en común.

\+

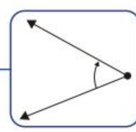
TRIGONOMETRÍA: Se debe considerar la **rotación** como elemento fundamental, pues a partir de ésta se comprenderá la existencia de un lado inicial, un lado final y sobre todo **un sentido de giro**.

=

ÁNGULO

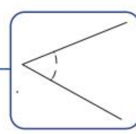
DISTINTAS FORMAS DE REPRESENTAR LOS ÁNGULOS

Gráfica



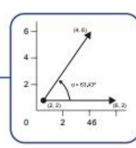
Se utiliza cuando el ángulo al que se hace referencia se construye a partir de coordenadas.

Simbólica



Se utiliza para mostrar solo la abertura de un ángulo.

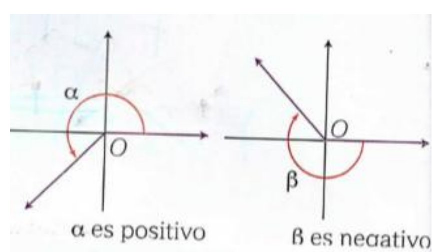
Plano coordenado



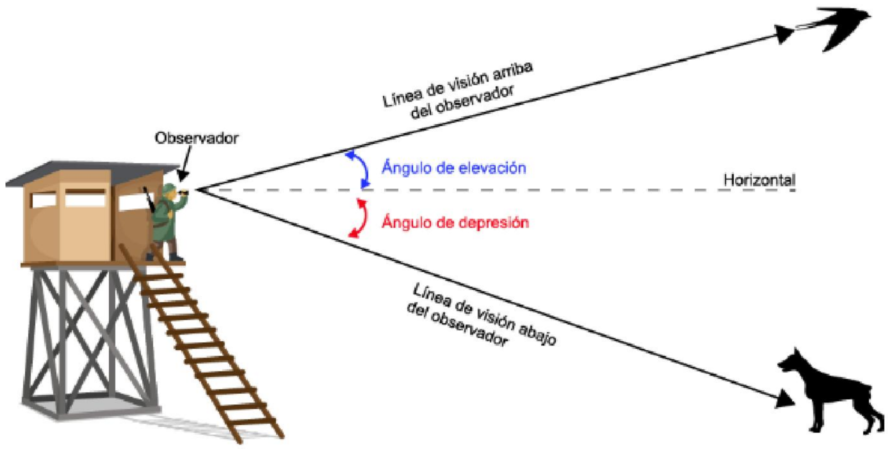
Se utiliza para referir un ángulo, conocidos los nombres de sus lados.

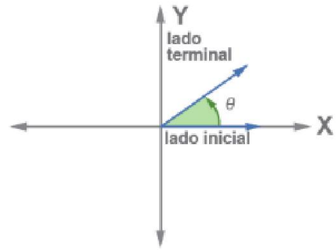
CLASES DE ÁNGULOS

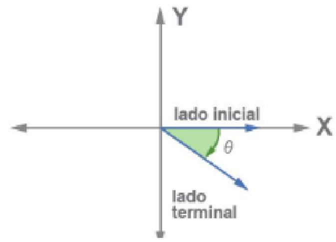
- ÁNGULOS DE ELEVACIÓN
- ÁNGULOS DE DEPRESIÓN
- ÁNGULOS POSITIVOS
- ÁNGULOS NEGATIVOS



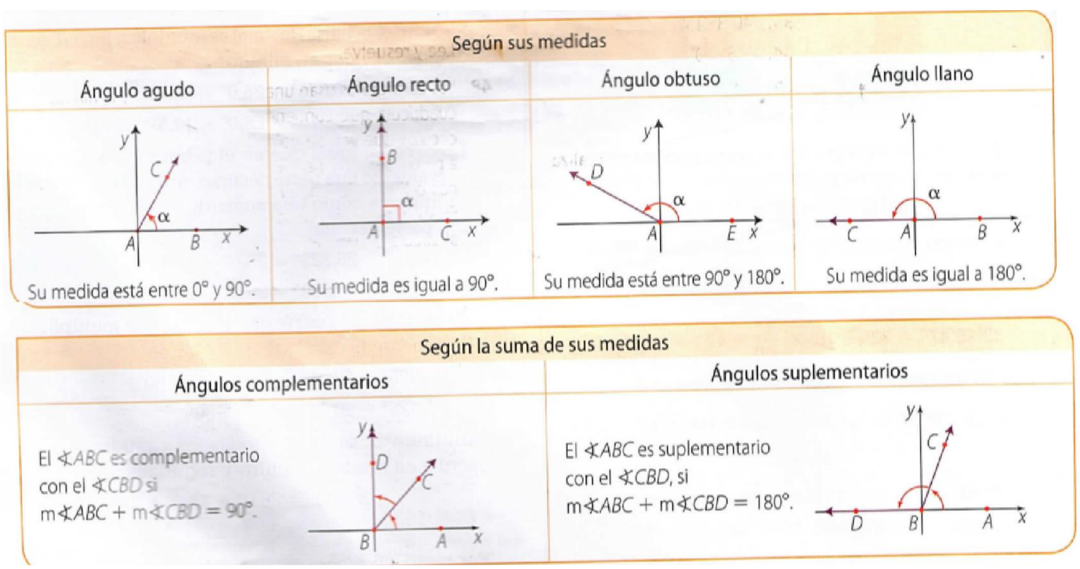
JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/







CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS



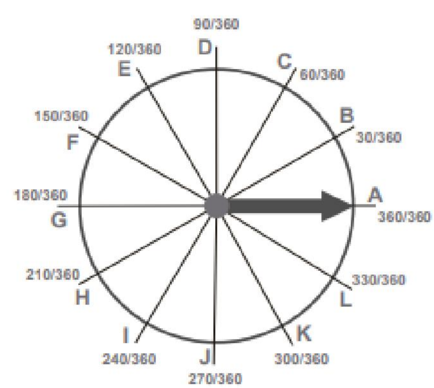
Según sus medidas			
Ángulo agudo	Ángulo recto	Ángulo obtuso	Ángulo llano
Su medida está entre 0° y 90°.	Su medida es igual a 90°.	Su medida está entre 90° y 180°.	Su medida es igual a 180°.

Según la suma de sus medidas	
Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios
El $\sphericalangle ABC$ es complementario con el $\sphericalangle CBD$ si $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle CBD = 90°$.	El $\sphericalangle ABC$ es suplementario con el $\sphericalangle CBD$, si $m\sphericalangle ABC + m\sphericalangle CBD = 180°$.

MEDICIÓN DE ÁNGULOS EN EL SISTEMA SEXAGESIMAL

UN POCO DE HISTORIA

El número 360, en este contexto por lo general, se atribuye a los babilonios, que idearon un sistema numérico con el número 60 como base. Probablemente fueron los primeros en dividir un círculo en 360 grados (6 x 60). Algunos historiadores piensan que la base (60 del sistema) se deriva de la aproximación de la duración de los días del calendario, pero otros afirman que los babilonios probablemente escogieron el número 60 porque es divisible por muchos otros números



JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°.* Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

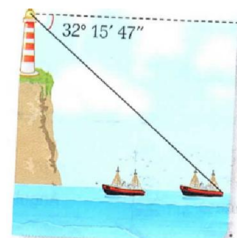
El sistema sexagesimal utiliza como unidad al **grado.** Un ángulo de giro completo es aquel que se genera por una rotación completa del lado final. La medida de este ángulo es de 360°, en el cual el símbolo ° se lee grados. Con relación a un ángulo de giro completo, es importante tener en cuenta que:

- Si un giro completo se divide en 360 partes iguales, entonces, cada parte es un grado sexagesimal, es decir, $\frac{1}{360}$ parte de la rotación es igual a 1°.
- Si un grado se divide en 60 partes iguales, entonces, cada parte es un minuto, es decir, $\frac{1}{60}$ de grado es igual a 1´, el símbolo ´ se lee minuto.
- Si un minuto se divide en 60 partes iguales, entonces, cada parte es un segundo, es decir, $\frac{1}{60}$ de minuto es igual a 1 ´´, el símbolo ´´ se lee segundo.

Por lo tanto, se concluye que 1**°** = 60´ = 3600´´

EJEMPLOS:

1. El operario de un faro visualiza un barco con ángulo de depresión de 32° 15´47´´.Determina la medida del ángulo en grados.



SOLUCIÓN:

Primero, la medida del ángulo se descompone como una suma de grados, minutos y segundos.

32° 15´47´´ = 32° + 15´+ 47´´

Segundo, los minutos se multiplican por $\frac{1°}{60}$ y los segundos se multiplican por $\frac{1°}{3600}$.

32° 15´47´´ = 32° + 15´ $\times$ $\frac{1°}{60}$ + 47´´$\times$ $\frac{1°}{3600}$

Luego, se realizan las multiplicaciones: 32° 15´47´´ = 32° + 0,25 + 0,0131 = **32, 2631**

Finalmente, se suman todas las cantidades.

Entonces, el ángulo 32° 15´47´´ es equivalente a **32, 2631.**

2. Una pelota de golf es golpeada desde la salida con un ángulo de 26,325°. Determinar el valor aproximado del ángulo en grados, minutos y segundos.

SOLUCIÓN:

Primero, la medida del ángulo se escribe como la suma de una parte entera y una parte decimal.

26,325° = 26,0° + 0,325°

Segundo, la parte decimal se multiplica por 60´ para obtener el valor en minutos.

26,325° = 26,0° + (0,325° $\times$ 60´)

26,325° = 26,0° + 19,5 ´

Tercero, al igual que el primer paso, si queda nuevamente una parte decimal, se escribe el término en minutos como una suma de una parte entera y una parte decimal.

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°.* Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

26,325° = 26,0° + 19,5 ´   entonces, 26,325° = 26,0° + 19,0´+ 0,5´

Cuarto, ahora la parte decimal se debe multiplicar nuevamente por 60 ´´ así:

26,325° = 26,0° + 19,0´+ 0,5 × 60´´   entonces, 26,325° = 26,0° + 19,0´+ 30´´

Finalmente, se suman todas las cantidades y se escribe en grados, minutos y segundos.

26,325° = 26,0° + 19,0´+ 30´´ = **26° 19´ 30´´**

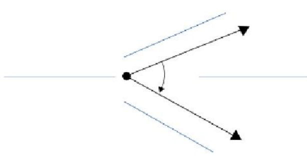
Por lo tanto, 26,325° es equivalente a **26° 19´30 ´´.**

ACTIVIDADES

PRODUCCIÓN TEXTUAL

1. Realizar en el cuaderno un organizador gráfico (mapa conceptual, línea de tiempo, cuadro sinóptico, entre otros) donde resuma coherentemente los conceptos planteados en la guía (Ángulo, clases de ángulo, formas de representación, medición de ángulos).

2. ¿Cuáles son las partes que componen un ángulo?



3. Dibuja los ángulos dados, nombrando sus partes.

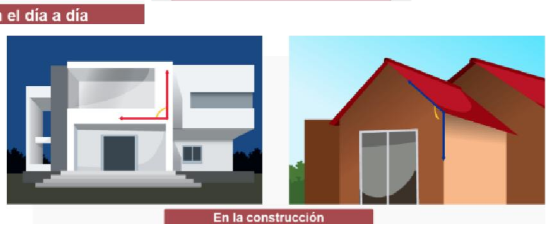
a. 128°   b. -260°   c. -20°

4. Según cada imagen escriba ¿Qué clase de ángulo es?

En el día a día

En la navegación

En la aviación



En la construcción

En tus movimientos

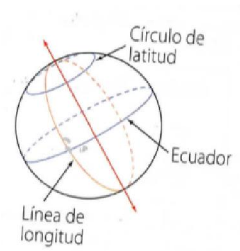
5. Expresa cada ángulo en grados, minutos y segundos.

a. 62,735°   b. 2,364°   c. 46,34°

6. Expresa el ángulo en grados.

a. 30° 15´35´´   b. 123° 22´45´´

PRUEBAS SABER (Selección múltiple)



7. Los cartógrafos usan una cuadrícula que contiene círculos que van de polo a polo, llamados meridianos o líneas de longitud. Existen otros, paralelos al círculo ecuatorial, que reciben el nombre de paralelas o líneas de latitud. Ambas líneas, meridianos y paralelos, determinan la posición geográfica de una región. Si Colombia se extiende a lo largo desde 12, 4628° latitud norte hasta 4,225° latitud sur, ¿Cuál es su latitud sur en grados, minutos y segundos?

A. 4°13´30´´   C. 12° 27´46,08´´
B. 4° 30´13´´   D. 12° 46´27,08´

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

PRÁCTICA

8. LA DIVISIÓN DEL CÍRCULO EN 12 PARTES

Ten a la mano los siguientes materiales y sigue las instrucciones. Luego responde a las preguntas que surgen al final.

MATERIALES:

- Octavo de cartulina
- Compás
- Transportador
- Tijeras
- Chinches
- Elementos para el dibujo (lápiz, borrador)

INSTRUCCIONES:

- En la cartulina dibuja un ángulo ABC de 30°
- Construye un triángulo rectángulo ABC cuyo ángulo de 90° sea ACB y luego recórtalo.
- Realiza sobre el material del estudiante una circunferencia de radio no mayor al lado AC del triángulo. Punce con un chinche el vértice A del triángulo y el centro de la circunferencia.
- Gire el triángulo alrededor de la circunferencia (el lado AC será el inicial y el AB el lado final) de manera gradual marque donde va quedando el lado AB, teniendo en cuenta que, para la próxima marca, se debe colocar el lado AC sobre el que era AB.

Estudiantes: Encima del triángulo se debe poner el círculo; utilizando el chinche, el punto A debe coincidir con el centro del círculo. Después, al girar el círculo se debe ir marcando la partición que va generando el triángulo al círculo, para que al final obtengan la partición observada:

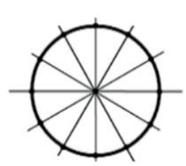


Ilustración 3. El círculo dividido en 12 partes

Después elaboren una flecha, la cual se va a adherir al círculo y cada partición se señala con una letra, éstas deben ir ubicadas como se muestra en la ilustración 4.

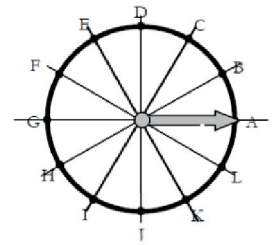


Ilustración 4. La partición del círculo y la flecha

PREGUNTAS DE LA PRÁCTICA REALIZADA

(Selección múltiple - única respuesta)

1. Iniciando en A, después se gira la flecha hasta K en sentido contrario a las manecillas del reloj. ¿Qué fracción corresponde al giro que se realizó?

A. $\frac{2}{12}$ B. $\frac{10}{12}$ C. 10 D. 2

2. Gira la flecha desde A hasta G en sentido contrario a las manecillas del reloj. ¿Qué fracción corresponde al giro que se realizó?

A. $\frac{12}{6}$ B. $\frac{3}{12}$ C. $\frac{6}{12}\ O\ \frac{3}{6}$ D. 6

3. Teniendo en cuenta el círculo de las 12 partes, Completa la siguiente tabla:

Ángulo	Fracción	Ángulo	Fracción
A	0/360°	H	
B		I	
	60/360°		
D		K	
F	150/360°		
G		A	360/360°

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

GEOMETRÍA

LÍNEA RECTA

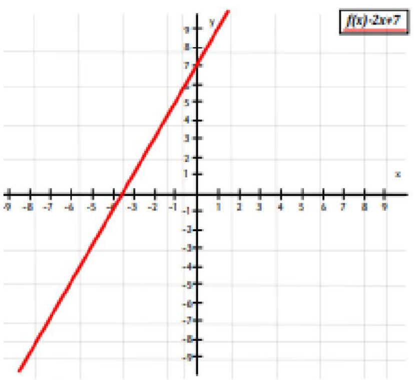
OBJETIVO: Usar los elementos de la función lineal (pendiente-intercepto), para encontrar la ecuación de la Recta.

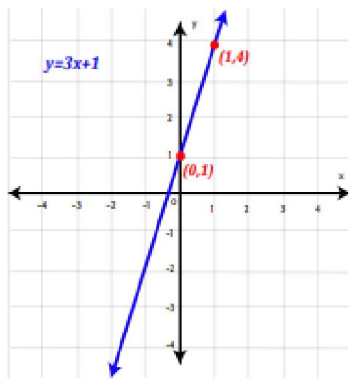
- Reconocer la pendiente en la expresión algebraica $y = mx \pm b$, y lo que representa en la gráfica.
- Describir la ecuación general de la recta $(Ax + By + c = 0)$ por medio de la expresión de la función lineal $y = mx + b$.

PENDIENTE DE UNA RECTA

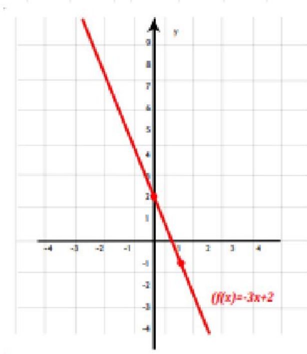
La pendiente indica qué tan inclinada está la recta con respecto al eje x.

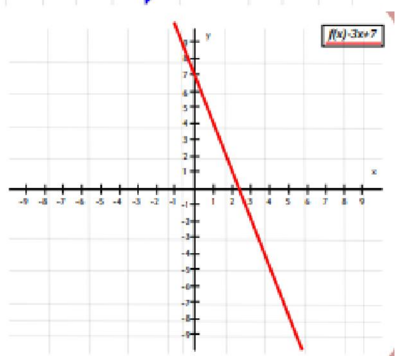
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$





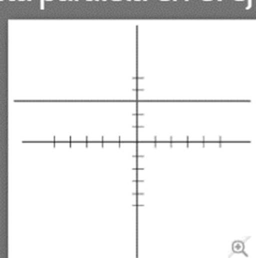
En estos dos gráficos la pendiente es positiva por la posición de la recta.





En estos dos gráficos la pendiente es negativa por la posición de la recta.

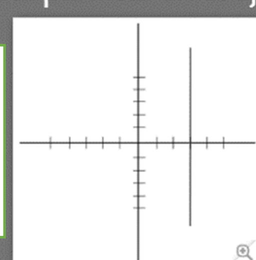
Recta paralela en el eje x



$y_2=y_1$

En este caso **no existe la pendiente,** porque el denominador es cero.

Recta paralela en el eje y



$x_2=x_1$

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

ECUACIÓN DE LA RECTA

Una recta: Es un conjunto de puntos que cumple una característica común; por lo tanto, es un lugar geométrico y se puede determinar su **ecuación.**

La ecuación $y = mx + b$, recibe el nombre de ecuación pendiente -intercepto en donde **m es la pendiente y b es el intercepto con el eje y.**

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

La ecuación general de la recta es de la forma $AX + BY + C = 0$ donde A, B C son números reales.

Para encontrar la ecuación se pueden presentar tres casos:

PRIMER CASO: Tener el valor de la pendiente y el del intercepto

EJEMPLO: Hallar la ecuación de la recta $y = m\,x + b$ si **m= 3 y b= 10**

Solución: Como ya tengo la pendiente y el intercepto lo único que se hace es reemplazar

$$\boldsymbol{y = 3x + 10}$$

SEGUNDO CASO: Dada la pendiente y un punto

EJEMPLO: Hallar la ecuación de la recta $y = m\,x + b$ que pasa por **el punto** $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ y pendiente m**= -5**

Solución: Primero, usamos el valor de la pendiente m=-5 y sustituimos en la ecuación $y = m\,x + b$ quedando $y = -5x + b$.

Segundo, buscamos el valor de b usando el otro dato que nos dan el punto (1,2), sustituyendo en $x = 1$ y $y = 2$ en la ecuación $y = m\,x + b$, es decir, $2 = -5\,(1) + b$.

Tercero, despejamos la variable b en:

$2 = -5\,(1) + b$.

$2 = -5\ + b$

$2 + 5 = +b$

$7 = b$.

Finalmente, sustituimos el valor de b en la ecuación $y = -5\,x + b$ quedando: $\boldsymbol{y = -5\,x + 7}$

TERCER CASO: Dados dos puntos

EJEMPLO: Hallar la ecuación de la recta $y = m\,x + b$ que pasa por **el punto** $(\mathbf{2}, -\mathbf{3})$ **y punto** $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$

Solución: Primero, se determina la **pendiente**

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ Fórmula\ de\ la\ pendiente}$$

$$\boldsymbol{m = \frac{1-(-3)}{1-2}\ se\ reemplaza\ las\ coordenadas\ de\ los\ dos\ puntos\ x\ y\ y.}$$

$$\boldsymbol{m = \frac{4}{-1}\ se\ resta}$$

$$\boldsymbol{m = -4\ se\ simplifica}$$

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

Segundo, buscamos **el valor de b** usando uno de los dos puntos que nos dan en este caso voy a tomar el punto (2,-3), sustituyendo en $x = 2$ y $y = -3$ en la ecuación $y = m\,x + b$, es decir, $-3 = -4\,(2) + b$.

Tercero, despejamos la variable b en:

$-3 = -4\,(2) + b$.

$-3 = -8 + b$

$-3 + 8 = +b$

$5 = b$.

Finalmente, sustituimos el valor de b en la ecuación $y = -4\,x + b$ quedando: $\boldsymbol{y = -4\,x + 5}$

ACTIVIDADES

1. Leer y pegar en su cuaderno de Geometría los conceptos y gráficas de la guía (Pendiente de la recta, Ecuación de la recta).

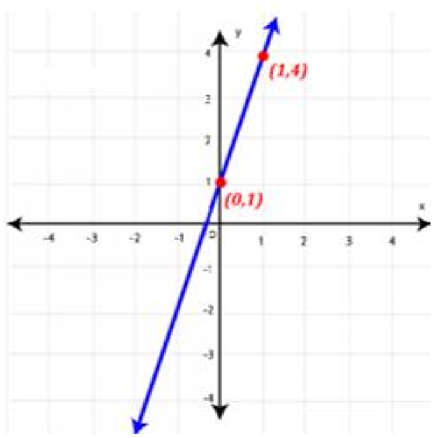
2. Hallar la ecuación de la recta $\mathrm{y = m\,x + b}$

a. Si $m = 3\; y\; b = 10$
b. Si $m = -1\; y\; b = -2$

3. Hallar la ecuación de la recta $\mathrm{y = m\,x + b}$ que pasa por:

a. El punto $(-1, -2)$ y tiene pendiente $m = 5$
b. El punto $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$ y tiene pendiente $m = -3$

4. Escriba la ecuación de la siguiente recta:



PRUEBAS SABER (Lee y elige la opción correcta)

5. ¿Cuál es la ecuación punto -pendiente de la recta cuya ecuación general es $6x - 3y - 18 = 0$?

A. $y = 2x - 6$
B. $y = 3x - 6$
C. $y = 2x - 1$
D. $y = 2x + 6$.

6. Un laboratorio estudió un grupo de bacterias con 350 individuos inicialmente. Se encontró que, después de aplicar cierto medicamento, el número de individuos vivos en el grupo disminuyó con el tiempo, y después de 25 horas, ya no había ningún individuo en el grupo. Suponiendo que el número de individuos que viven varía linealmente con el tiempo, contados a partir de la administración del medicamento.

7. La ecuación de la recta que representa la situación es:

A. $y = -14x + 350$
B. $y = 14x + 350$
C. $y = x + 350$
D. $y = -25x + 350$

8. ¿Cuántos individuos permanecen vivos en la colonia al cabo de 10 horas?

A. $210\; individuos$
B. $10\; individuos$
c. $350\; individuos$
d. $25\; individuos$

9. Los alumnos de grado décimo programan un viaje. Desean alquilar un bus y disponen de dos opciones:

OPCIÓN 1: $ 90.000 por día
OPCIÓN 2: $ 40.000 por día + $ 4.000 por kilómetro recorrido.
Si piensan quedarse 8 días y estiman recorrer unos 400 km ¿Qué opción es más conveniente?

A. La opción 1
B. La opción 2
C. Las dos opciones

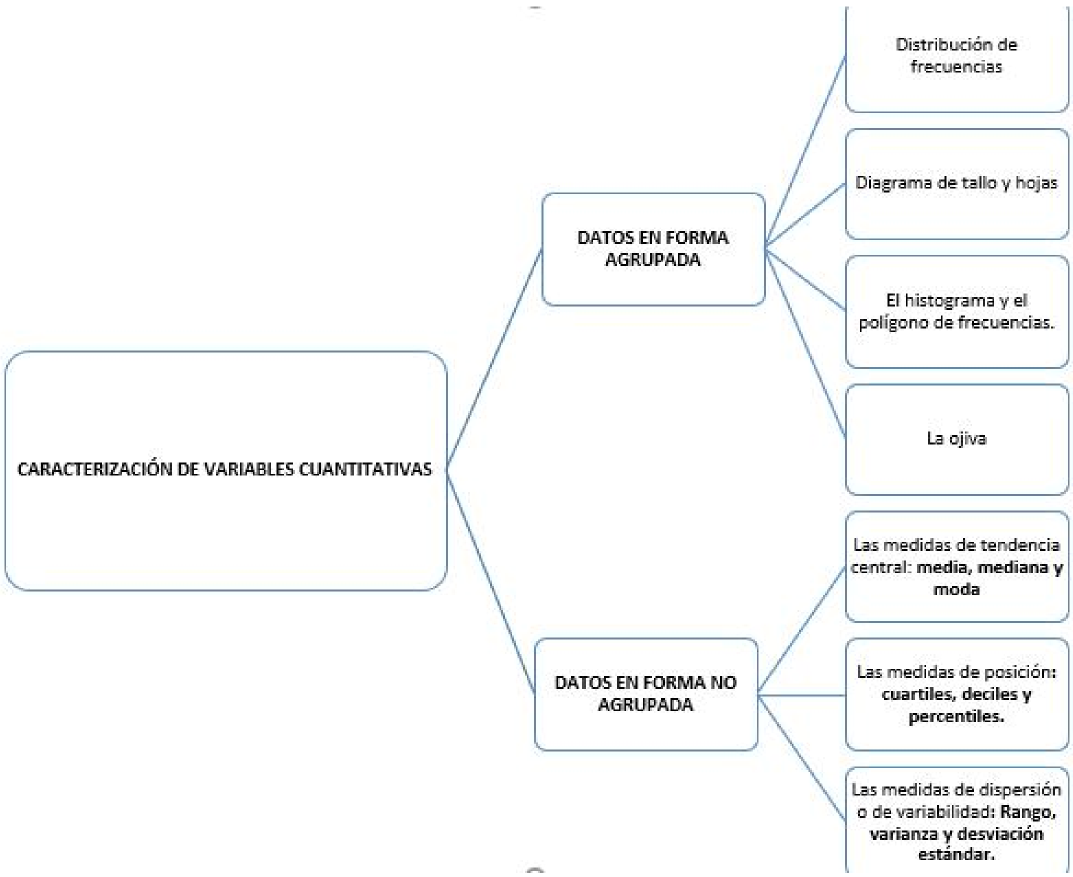
JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

MEDIDAS DE LOCALIZACIÓN RELATIVA

OBJETIVO: Determinar la localización relativa de los datos de una distribución.

- Usar el valor estandarizado z para comparar valores de distintos conjuntos de datos.

VALOR Z O VALOR ESTANDARIZADO



VALOR Z O VALOR ESTANDARIZADO

Un valor z o valor estandarizado juega un papel importante para comparar valores de distintos conjuntos de datos. Este valor se interpreta como el número de desviaciones estándar a las que se encuentra un dato x_i en relación con la media $\bar{x}$.

Para un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, tomados de una muestra, la media $\bar{x}$, y la desviación estándar de dicha muestra s, el valor asociado con cada x_i de la muestra es llamado valor z y se calcula con la siguiente expresión:

$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ donde z_i *es el valor z asociado al dato* x_i *de la distribución.*

Es importante mencionar que:

- Un valor z igual a cero indica que el dato tomado es igual a la media
- Un valor z negativo indica que dicho dato está ubicado por debajo de la media
- Un valor z positivo indica que el dato tomado está ubicado por encima de la media.

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

EJEMPLO: Una aerolínea nacional registra los viajes a los diferentes destinos nacionales durante un fin de semana, en la siguiente tabla:

DESTINO	MEDELLÍN	BOGOTÁ	CALI	CARTAGENA	BUCARAMANGA
CANTIDAD DE PASAJEROS	1.633	2.212	1.488	830	1.337

La directora comercial planea ampliar los viajes para cada destino, si la mayoría de los destinos supera la media, pero quiere tener la seguridad de que hay suficientes pasajeros en cada destino de tal forma que los nuevos viajes sean aprovechados en su totalidad. ¿Hay suficientes pasajeros para ampliar los viajes a cada destino?

SOLUCIÓN:

Primero, se calculan la media o promedio y la deviación estándar de la distribución.

El cálculo de la **media** se realiza de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1633 + 2212 + 1488 + 830 + 1337}{5} = 1500$$

El cálculo para la **desviación estándar** es:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(1633-1500)^2 + (2212-1500)^2 + (1488-1500)^2 + (830-1500)^2 + (1337-1500)^2}{5-1}$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{17.689 + 506.944 + 144 + 448.900 + 26.569}{4} = \frac{1.000.246}{4} = 250.061,5$$

$$s^2 = 250.061,5$$

$$s = \sqrt{250.061,5} \approx 500\, pasajeros$$

Segundo, se calcula **el valor z** para determinar que los datos (en este caso la cantidad de pasajeros) sean tan cercanos a la media que valga la pena la ampliación de los viajes a cada destino.

CANTIDAD DE PASAJEROS	DESVIACIÓN CON RESPECTO A LA MEDIA $x_i - \bar{x}$	Valor $z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$
1.633	133	0,266
2.212	712	1,424
1.488	-12	-0,024
830	-670	-1,34
1.337	-163	-0.326

Luego, a partir de los respectivos valores z se realiza un análisis de este valor.

- $x_1 = 1.633$ tiene una desviación estándar con respecto a la media del 0, 266; así se puede afirmar que es un dato que está por encima de la media.

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/

- $x_4 = 8\ 30$tiene una desviación estándar con respecto a la media del -1,34; así se puede afirmar que es un dato ubicado por debajo de la media.
- $x_2 = 2.212$ tiene una desviación estándar con respecto a la media del 1,424 y es el dato más alejado pues está 1,424 por encima de ella.

Finalmente, se concluye que:

La desviación estándar es pequeña en esta situación, por lo tanto, la media es un buen descriptor.

Ya que el valor z más lejano de la media es pequeño (1,424) se puede afirmar que la ampliación de los viajes los fines de semana por parte de la aerolínea, pueden darse y estos serán aprovechados, ya que hay un número considerable de pasajeros.

ACTIVIDADES

Lee y resuelve

En la tabla se presentan datos sobre la humedad relativa del aire, en % referidos a un parque natural del país.

DÍAS	L	M	MI	J	V	S	D
HUMEDAD	78	90	80	92	88	74	80

1. Encuentra la media del conjunto de datos.
2. Determina la desviación estándar correspondiente.
3. Calcula los valores z para cada uno de los datos.

La junta directiva de un equipo de fútbol decide comprar los derechos de un jugador de dos posibles, para ocupar la posición de delantero. Para tal fin, el mánager de cada jugador muestra la cantidad de goles que han anotado en las últimas cinco temporadas.

JUGADOR 1	18	16	14	17	20
JUGADOR 2	30	20	14	4	17

4. Calcula la media para conocer el promedio de goles de cada jugador durante las cinco temporadas.
5. Halla la desviación estándar correspondiente a los goles de cada jugador.
6. Determina los valores de z para cada temporada de cada jugador. Luego, compara los resultados obtenidos.

Una muestra de 20 oficinas ubicadas en un edificio tomó parte de un simulacro de evacuación. A cada una se le midió el tiempo, en segundos, que empleó para desalojar completamente la oficina. Los resultaron fueron:

389 356 375 324 325 373 373 370 364 366
369 374 359 356 369 402 363 325 339 392

7. Calcula el promedio de tiempo de evacuación de los trabajadores de cada oficina.
8. Calcula la desviación estándar de los datos.
9. Determina los valores z para cada dato. Luego, escribe una conclusión.
10. La oficina de atención y prevención de desastres determinó que el tiempo medio de la evacuación debe ser menor de 350 segundos. ¿Los trabajadores de las oficinas cumplen con este requerimiento?

JOYA, Anneris. *Proyecto Saberes 10°*. Bogotá, Editorial Santillana, 2016.
https://aprende.colombiaaprende.edu.co/